

7 класс

Задача 1. Во время Великой французской революции декретом конвента было введено «Десятичное время». Сутки от полуночи до полуночи делились на 10 десятичных часов, час на 100 десятичных минут, а минута на 100 десятичных секунд. Таким образом, полночь приходилась на 0:00:00, полдень — на 5:00:00 и т. п. Однажды курьер отправился из Парижа в Версаль, между которыми расстояние 5,2 лье, когда его новые десятичные часы показывали 3:56:78. Доставив важное донесение, он вернулся в Париж в 6:79:40. Определите среднюю скорость $v_{\text{ср}}$ курьера. Ответ выразите в привычных нам км/ч.

Примечание: 1 лье равен 4 км.

Решение. В десятичном времени путешествие длилось $67940 - 35678 = 32262$ дес. секунд. По условию 50000 дес. секунд = 12 час. Следовательно, 32262 дес. секунд = 7,743 ч. Расстояние от Парижа до Версаля и обратно равно $2 \cdot 5,2 \cdot 4 \text{ км} = 41,6 \text{ км}$. Откуда $v_{\text{ср}} = 5,37 \approx 5,4 \text{ км/ч}$.

Критерии оценивания

- | | |
|--|---------|
| 1) Найдена длительность путешествия в десятичном времени | 2 балла |
| 2) Перевод времени движения в привычные часы (привычное время) | 4 балла |
| 3) Перевод пути из лье в километры | 2 балла |
| 4) Определена средняя скорость | 2 балла |

Задача 2.

Автомобиль, едущий по круговой трассе, проходит один круг со средней путевой скоростью $V_1 = 30 \text{ км/ч}$ и начинает новый круг. С какой постоянной скоростью он должен проехать второй круг для того, чтобы эта скорость оказалась в два раза больше средней путевой скорости за два круга?

Решение.

Пусть длина одного круга трассы равна S , а средняя путевая скорость за два круга равна V . Тогда по определению средней путевой скорости:

$$V = \frac{2S}{\frac{S}{V_1} + \frac{S}{2V}} \Rightarrow V = \frac{4VV_1}{2V + V_1} \Rightarrow V = \frac{3}{2}V_1 = 45 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Искомая скорость прохождения второго круга равна $u = 2V = 90 \text{ км/ч}$.

Критерии оценивания

- | | |
|--|---------|
| 1. Определение средней скорости | 1 балл |
| 2. $V = \frac{2S}{\frac{S}{V_1} + \frac{S}{2V}}$ | 4 балла |
| 3. $V = 45 \text{ км/ч}$ | 4 балла |
| 4. Искомая скорость равна $u = 2V = 90 \text{ км/ч}$ | 1 балл |

Задача 3.

Когда смешали один литр жидкости A с одним килограммом жидкости B , получили смесь жидкостей с плотностью $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$. Найдите плотность жидкости B , если плотность жидкости A равна $\rho_A = 800 \text{ кг/м}^3$. Считайте, что объём смеси жидкостей равен сумме объёмов смешиваемых жидкостей.

Решение.

Пусть $V = 1 \text{ л}$, $m = 1 \text{ кг}$. С одной стороны, масса смеси жидкостей равна сумме масс составляющих, т.е.

$$M = m + \rho_A V.$$

С другой стороны, M можно найти, используя определение средней плотности:

$$M = \rho \left(V + \frac{m}{\rho_B} \right).$$

Решая эту систему уравнений, получаем:

$$\rho_B = \frac{m\rho}{m - (\rho - \rho_A)V} = 1250 \text{ кг/м}^3.$$

Критерии оценивания

- | | |
|---|---------|
| 1. $M = m + \rho_A V$ | 3 балла |
| 2. $M = \rho \left(V + \frac{m}{\rho_B} \right)$ | 4 балла |
| 3. $\rho_B = 1250 \text{ кг/м}^3$ | 3 балла |

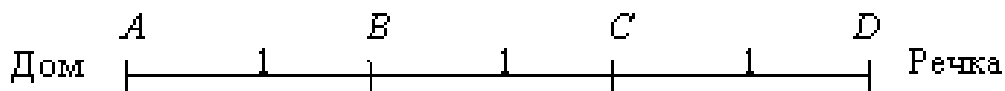
Задача 4.

Кот Матроскин и пес Шарик каждое утро бегают на речку умыться. Они выскакивают из дома одновременно и бегут по одной и той же тропинке. Скорость каждого из них постоянна, но Матроскин бежит в 3 раза быстрее Шарика, зато моется в 2 раза дольше, чем Шарик. Однажды Шарик, прибежав к речке, обнаружил, что не взял с собой полотенце. Он тут же побежал домой, схватил полотенце и прибежал к речке как раз в тот момент, когда Матроскин закончил умыться (бежал Шарик по той же тропинке и с той же скоростью, что и каждое утро).

Кто обычно прибегает домой раньше – Шарик или Матроскин или они прибегают домой одновременно?

Решение.

Разделим дорогу от дома к речке на три участка одинаковой длины (см. рисунок) и эту длину примем за 1.



Введем новую единицу измерения – «шарик»; по определению, 1 «шарик» – это время, нужное Шарiku, чтобы утром по дороге на речку пробежать участок длины 1.

По условию, когда Матроскин добегает до D (начинает умыться), Шарик как раз находится в точке B (ведь он бежит в 3 раза медленнее Матроскина).

Следовательно, на дорогу от дома до речки (так же, как и на обратную дорогу) Матроскин затрачивает столько же времени, сколько нужно Шарiku, чтобы пробежать отрезок длины 1, т. е. 1 «шарик». Матроскин умывается 8 «шариков» (действительно, в тот день, когда Шарик забыл полотенце, он, как всегда, добежал до точки В, а Матроскин в этот момент начал умываться, затем Шарик пробежал 8 раз отрезок длины 1: от В к D (два участка длины 1), от D к А (три участка длины 1) и, наконец, от А к D уже с полотенцем (три участка длины 1), - и как раз Матроскин в этот момент умываться закончил). Далее, так как по условию Матроскин моется в два раза дольше Шарика, то Шарик моется 4 «шарика». Остается подсчитать время, затраченное каждым из наших героев на дорогу от дома к речке, умывание и дорогу обратно, от речки к дому. Шарик: $3 + 4 + 3 = 10$ «шариков»; Матроскин: $1 + 8 + 1 = 10$ «шариков». Следовательно, Матроскин и Шарик прибегают домой после умывания одновременно.

Критерии оценивания.

- 1) Введен условный масштаб расстояний - 2 балла
- 2) Проведено сравнение расстояний, проходимых героями за одно и то же время - 1 балла
- 3) Определена длительность умывания каждого героя задачи - 2 балла
- 4) Подсчитано время, затраченное каждым из героев на дорогу от дома к речке - 4 балла
- 5) Сделан окончательный вывод – 1 балл

8 класс

Задача 1.

8.9. В цилиндрических сообщающихся сосудах находится вода. Площадь поперечного сечения широкого сосуда в 3 раза больше площади поперечного сечения узкого сосуда. В узкий сосуд наливают керосин, который образует столб высотой 10 см, а в широкий сосуд бензол, образующий столб высотой 20 см. Чему равна разность уровней воды в сосудах? На сколько изменился уровень воды в широком сосуде? Плотность керосина составляет 80%, а бензола 88% от плотности воды.

Решение.

8.9. Известно, что давление в однородной жидкости на одной глубине (в нашем случае на уровне 1) одинаково (Рис.1).

Значит:

$$p_k + p_\epsilon = p_\delta$$

$$\rho_k g h_1 + \rho_\epsilon g H = \rho_\delta g h_2. \text{ Отсюда}$$

$$H = \frac{\rho_\delta h_2 - \rho_k h_1}{\rho_\epsilon} =$$

$$= \frac{880 \cdot 0.2 - 800 \cdot 0.1}{1000} = 9.6 \text{ см}$$

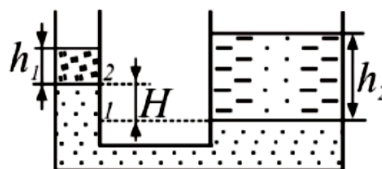


Рис.1

Уровень воды в широком сосуде понизится на величину в 3 раза меньшую, чем повысится в узком сосуде, т.е. $\Delta h_2 + 3\Delta h_2 = H$, тогда $\Delta h_2 = \frac{9.6}{4} = 2.4 \text{ см}$

Задача 2.

8.20. При помощи подвижного блока поднимают из воды стальную плиту объемом 50 дм³. Какую силу приходится прикладывать при этом, когда плита находится в воде?

Решение.

8.20. Как известно, с помощью подвижного блока достигается выигрыш в силе в 2 раза (Рис.2) Если пренебречь силами сопротивления при подъеме плиты в воде и осуществлять подъем медленно, то для этого необходима сила $2F = mg - F_{\text{Арх}}$, где $F_{\text{Арх}} = \rho_e g V$. Тогда искомая сила F будет равна:

$$F = \frac{mg - F_{\text{Арх}}}{2} = \frac{gV(\rho_{\text{ст}} - \rho_{\text{в}})}{2} = \frac{9.8 \cdot 50 \cdot 10^{-3} \cdot (7800 - 1000)}{2} = 1666 \text{ (Н)}$$

Ответ: $F = 1666 \text{ Н}$.

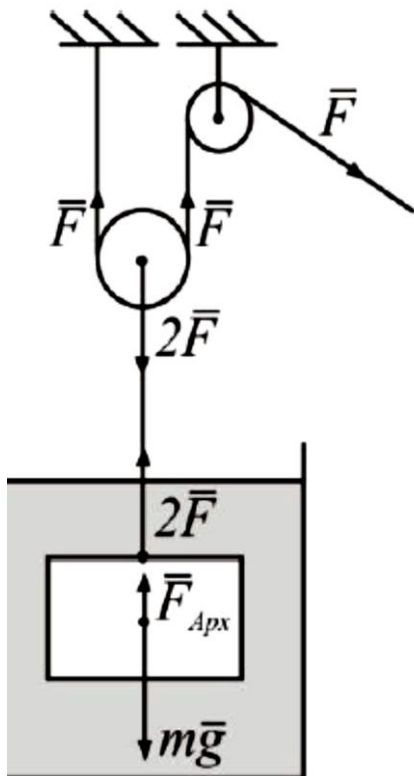
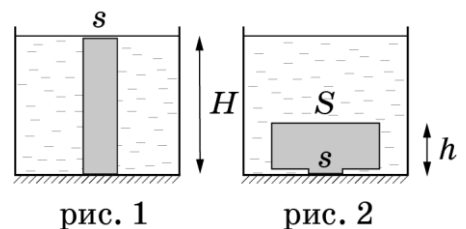


Рис. 2

Задача 3. Цилиндрический столбик из пластилина высотой H и площадью основания s плотно прилепили к гладкому дну сосуда, в который налили жидкость плотностью ρ_0 до верха столбика (рис. 1). Вода под столбик пластилина не подтекает. Не изменяя площади контакта пластилина с дном и не отделяя его от



дна, столбик превратили в цилиндр высоты h стоящий на очень короткой ножке (рис. 2). Определите, в какую сторону направлена и чему равна результирующая сила, действующая со стороны жидкости на деформированный пластилин. Атмосферное давление p_0 .

Решение.

После деформации объём пластилина не изменился, следовательно, $sH = Sh$, где S – площадь верхней грани нового цилиндра. Горизонтальные составляющие сил давления жидкости, действующие на столбик, компенсируют друг друга. На деформированный пластилин со стороны жидкости в вертикальном направлении вверх действует сила:

$$F = \rho_0 g (S - s)H + p_0 (S - s) - [\rho_0 g S (H - h) + p_0 S] = -p_0 s.$$

(Другой вариант решения)

$F_{Арх} = \rho_0 g (S - s)h$ - сила Архимеда, действующая на «шайбу» площадью $S - s$. Сила давления жидкости на столбик сечением s равна $F_{жс} = \rho_0 g s (H - h) + p_0 s$.

Результирующая сила $F_{общ} = F_{жс} - F_{Арх} = \rho_0 g [s(H - h) - (S - s)h] + p_0 s = p_0 s$.

Наличие атмосферного давления увеличит обе силы на одну и ту же величину, и не изменит результат.

Следовательно, после деформации пластилина результирующая сила не изменяется.

Критерии оценивания

1	Записано условие постоянства объёма пластилина	2 балла
2	Упомянута компенсация горизонтальных составляющих сил.	1 балла
3	Правильно записана сила давления сверху	2 балла
4	Правильно записана сила давления жидкости	2 балла
5	Показано равенство нулю результирующей силы	2 балла
6	Учтено атмосферное давление (или аргументирован отказ его учёта)	1 балла

Примечание: Задачу можно решить в общем виде: Искомая сила есть разница между силой Архимеда действующей на полностью окруженное водой тело и силой давления жидкости на площадку s . Поскольку, в обоих случаях пятно контакта со дном и объём пластилина не изменялись, то и

результатирующая сила не изменялась. Если участник рассуждал подобным образом, то он заслуживает полный балл!

Задача 4.

8.66. После того, как автобус проехал первую половину пути, он попал в дорожную пробку. В результате его средняя скорость на второй половине пути в 8 раз меньше, чем на первой. Средняя скорость автобуса на всем пути равна 16 км/ч. Определите скорость автобуса на второй половине пути.

Решение.

8.66. Пусть v_{cp} - средняя скорость движения на всем пути s , а t_1 , t_2 , v_1 и v_2 - время и скорости автобуса на первой и второй половинах пути соответственно.

Все время движения автобуса равно $t = t_1 + t_2$. По условию задачи $t_1 = \frac{\frac{s}{2}}{8v_2} = \frac{s}{16v_2}$

и $t_2 = \frac{\frac{s}{2}}{v_2} = \frac{s}{2v_2}$. Используя эти выражения, находим время движения автобуса

$t = \frac{s}{16v_2} + \frac{s}{2v_2} = \frac{9s}{16v_2}$. Из формулы $v_{cp} = \frac{s}{t}$ определяем время $t = \frac{s}{v_{cp}}$.

Таким образом, $\frac{9s}{16v_2} = \frac{s}{v_{cp}}$. Откуда $v_2 = \frac{9v_{cp}}{16} = 9 \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}} \right)$.

Критерии оценивания.

- | | |
|--|---------|
| 1) Записано выражение для всего времени движения | 1 балл |
| 2) Записано выражение для t_1 | 2 балла |
| 3) Записано выражение для t_2 | 2 балла |
| 4) Записана формула средней скорости | 2 балла |
| 5) Получен окончательный результата | 1 балл |

9 класс

Задача 1. Однажды у Карлсона заглох моторчик, и он начал падать вертикально вниз с постоянной скоростью $v_1 = 6$ м/с. После ремонта моторчик стал развивать постоянную силу тяги. Из-за этого, при вертикальном подъёме Карлсон выходил на скорость $v_2 = 3$ м/с. С какой постоянной скоростью он двигался в горизонтальном полёте? Считать силу сопротивления воздуха пропорциональной квадрату скорости. Карлсон, будучи в меру упитанным, одинаково обтекаем во всех направлениях.

Решение.

По условию сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости, то есть задаётся формулой kv^2 . При свободном падении сила тяжести равна силе сопротивления:

$$mg = kv_1^2, \text{ откуда } k = \frac{mg}{v_1^2}.$$

Обозначим силу тяги моторчика после ремонта F_T . При вертикальном взлёте сила тяги равна сумме силы тяжести и силы сопротивления:

$$F_T = mg + kv_2^2 = mg \left(1 + \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 \right).$$

При горизонтальном полёте сила тяги компенсирует силу тяжести, направленную вертикально и силу сопротивления, направленную горизонтально:

$$F_T^2 = mg^2 + kv_3^2 = mg^2 \left(1 + \left(\frac{v_3}{v_1} \right)^4 \right).$$

Из приведённой выше системы уравнений найдём v_3 :

$$v_3 = \sqrt[4]{v_2^2 v_2^2 + 2v_1^2} = 5,19 \text{ м/с}.$$

Примерные критерии оценивания

За второй закон Ньютона для свободного падения.....	2 балла
Выражена сила тяги при вертикальном взлёте.....	3 балла
Выражена сила тяги при горизонтальном полёте	3 балла
Получен ответ в символьной форме	1 балл
Числовой ответ	1 балл

Задача 2.

Величина скорости камня, брошенного с горизонтальной плоскости под углом к горизонту, через время $t = 0,5$ с после броска составляла $\alpha = 80\%$ от величины начальной скорости, а ещё через t соответственно $\beta = 70\%$.

- 1) Найдите продолжительность T полёта камня.
- 2) На каком расстоянии S от места броска упал камень?

Ускорение свободного падения $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, сопротивлением воздуха можно пренебречь.

Решение.

Пусть v_{x0} — проекция скорости камня в начальный момент на горизонтальную ось, а v_{y0} — на вертикальную. Если пренебречь сопротивлением воздуха, то проекция скорости камня на горизонтальную ось сохраняется, а проекция на вертикальную ось будет изменяться по закону

$$v_y(t) = v_{y0} - gt.$$

Величина скорости камня в любой момент может быть найдена по формуле

$$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2 - gt^2}.$$

По условию

$$\begin{aligned} v(\tau) &= \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2 - g\tau^2} = \alpha \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2}, \\ v(2\tau) &= \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2 - 2g\tau^2} = \beta \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Решая эту систему, найдём $v_{x0} = 21,1 \text{ м/с}$, $v_{y0} = 21,7 \text{ м/с}$. Время полёта $T = 2v_{y0}/g = 4,4 \text{ с}$, расстояние от места броска до места падения $S = v_{x0}t_n = 93 \text{ м}$.

Примерные критерии оценивания

Указано, что горизонтальная проекция скорости постоянна.....	1 балл
Уравнение для вертикальной проекции скорости.....	1 балл
Система (1) или аналогичная ей.....	2 балла
Формула для времени полёта $t_n = 2v_{y0}/g$	1 балл
Формула $l = v_{x0}t_n$	1 балл
Найдена величина времени падения с точностью не хуже 5%.....	2 балла
(если точность 6-10% даётся 1 балл, если точность хуже баллов не даётся)	
Найдено расстояние от точки броска до падения с точностью не хуже 5%.....	2 балла
(если точность 6-10% даётся 1 балл, если точность хуже баллов не даётся)	

Задача 3.

Определить мощность Ниагарского водопада, если его высота 50 м, а среднегодовой расход воды $Q=5900 \text{ м}^3/\text{с}$.

Решение.

$$\text{Мощность равна } N = \frac{A}{t}, \quad (1) \quad \underline{\underline{2 \text{ балла}}}$$

где A — работа силы, t — время.

По закону сохранения энергии работа силы тяжести израсходованной воды равна запасу потенциальной энергии воды:

$$A = E_n \quad (2) \quad \underline{\underline{2 \text{ балла}}}$$

или $Nt = \rho Q t g h,$ (3) 3 балла

где ρ – плотность воды, g – ускорение свободного падения

Из (1) и (3) следует:

$$N = \rho Q h g \quad (4) \quad \underline{2 \text{ балла}}$$

Расчет: $N=1000 \cdot 5900 \cdot 50 \cdot 10=2891 \text{ МВт.}$ 1 балл

Задача 4.

В калориметре находится смесь воды и льда в состоянии термодинамического равновесия. Через время τ_1 после включения спирали, подсоединенной к источнику постоянного напряжения, весь лёд растаял, а ещё через время τ_2 вода нагрелась на Δt . Пренебрегая теплоёмкостью калориметра, определите, каково было отношение n массы воды $m_{\text{в}}$ к массе льда $m_{\text{л}}$ в момент включения спирали. Удельная теплоёмкость воды $c_{\text{в}}$, удельная теплота плавления льда λ .

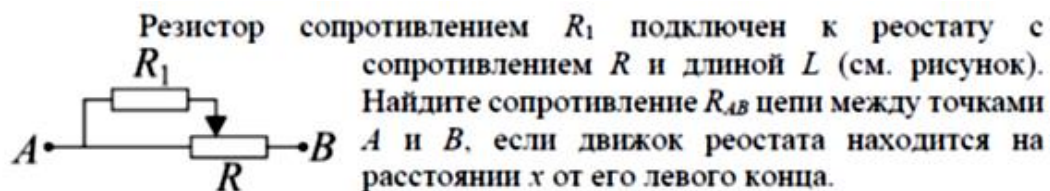
Решение. Пусть мощность, передаваемая спиралью содержимому калориметра, равна N . Поскольку в момент включения спирали смесь воды и льда находилась в состоянии термодинамического равновесия, т.е. при температуре таяния льда, то $m_{\text{л}}\lambda = N\tau_1$. По условию на нагрев образовавшейся и имевшейся ранее в калориметре воды потребовалось время τ_2 . Следовательно, $(m_{\text{л}} + m_{\text{в}})c\Delta t = N\tau_2$ и $n = \frac{m_{\text{в}}}{m_{\text{л}}} = \frac{\lambda\tau_2}{c\Delta t\tau_1} - 1$.

Ответ: $n = \frac{\lambda\tau_2}{c\Delta t\tau_1} - 1$

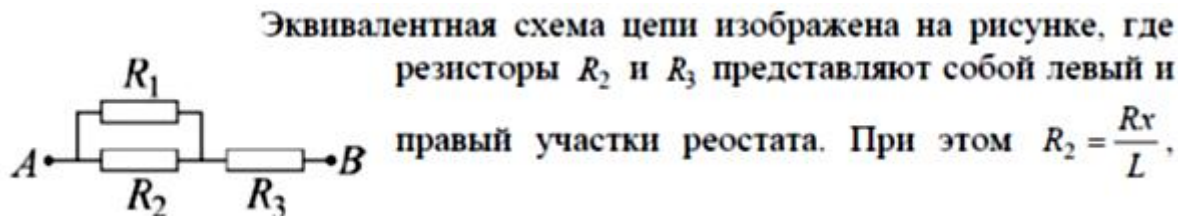
Критерии оценивания.

- 1) Записано условие термодинамического равновесия через время τ_1
3 балла
- 2) Записано условие термодинамического равновесия через время τ_2
3 балла
- 3) Записано выражение для n 3 балла
- 4) Выполнено преобразование формулы для n 1 балл

Задача 5.



Решение.



$R_3 = \frac{R(L-x)}{L}$. Сопротивление двух параллельно соединенных резисторов

$R' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Полное сопротивление цепи $R_{AB} = R' + R_3$.

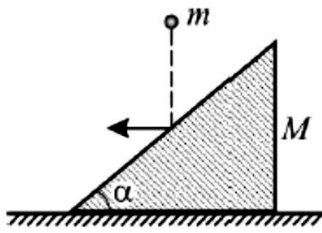
Ответ: $R_{AB} = R \cdot \left(\frac{R_1 x}{R_1 L + Rx} + \frac{L-x}{L} \right)$.

Критерии оценивания.

- | | |
|--|---------|
| 1) Представлена эквивалентная схема цепи | 2 балла |
| 2) Записано выражение для R_2 | 2 балла |
| 3) Записано выражение для R_3 | 2 балла |
| 4) Записано выражение для R' | 2 балла |
| 5) Записано выражение для R_{AB} | 2 балла |

Задача 1.

2. На горизонтальном столе постоит клин массой M . Сверху на клин падает шарик массой m . Определите угол α при основании клина, если известно, что после упругого удара о клин шарик отскочил по горизонтали, а клин начал двигаться поступательно. Трением между всеми поверхностями можно пренебречь.



Решение. Поскольку смещения шарика и клина за время соударения пренебрежимо малы и трение отсутствует, то сила взаимодействия шарика и клина направлена по нормали к наклонной плоскости. Следовательно, изменение импульса шарика $\Delta \vec{p} = m \Delta \vec{v}$ при ударе также будет направлено по нормали к наклонной плоскости клина (см. рисунок, где $\vec{v}_0$ и $\vec{v}$ – скорости шарика до и после удара соответственно, $\vec{u}$ – скорость клина после удара). Из рисунка видно, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{v_0}$. По закону сохранения импульса

в проекции на горизонтальное направление $mv = Mu$. По закону сохранения кинетической энергии при упругом ударе $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}$.

Отсюда $u = v \frac{m}{M}$, $v_0 = v \sqrt{1 + \frac{m}{M}}$. Объединяя записанные выражения,

получаем, что $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{M}{M+m}}$.

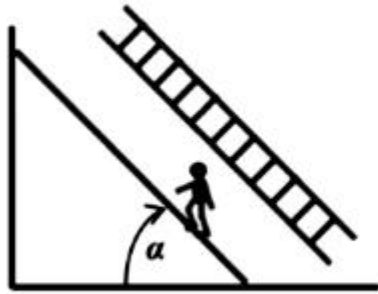
Ответ: $\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{M}{M+m}}$.

Критерии оценивания

- | | |
|--|---------|
| 1) Сделан рисунок с указанием компонент скорости | 2 балла |
| 2) Записано выражение для $\operatorname{tg} \alpha$ | 2 балла |
| 3) Записан закон сохранения энергии | 2 балла |
| 4) Записан закон сохранения импульс | 2 балла |
| 5) Получено окончательное выражение | 2 балла |

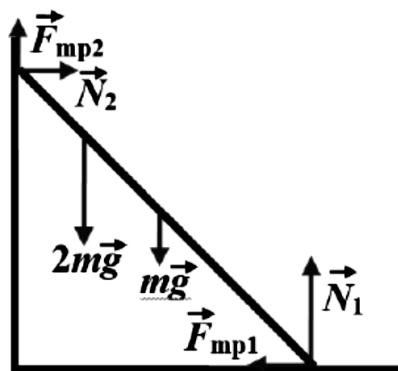
Задача 2.

У лестницы 11 одинаковых ступеней, распределенных равномерно: расстояние от нижнего конца до нижней ступени, расстояния между соседними ступенями и расстояние от верхней ступени до верхнего конца одинаковы. Ее поставили в угол, образованный стеной и полом. Коэффициент трения между стеной и лестницей $\mu = 0,25$, а коэффициент трения между лестницей и полом $2\mu = 0,5$. Человек с массой, равной удвоенной массе лестницы, поднимается по ступеням. Когда он перенес весь свой вес на девятую ступень, лестница, немного постояв, начала скользить. Чему равнялся угол между лестницей и полом?



Решение.

Решение задачи: Искомый угол α - в точности «критический» угол



наклона, при котором силы трения, удерживающие лестницу от проскальзывания, еще обеспечивают равновесие (лестница «немного постояла»), но уже достигли своих максимальных значений. Пусть масса лестницы равна m , а масса человека – $2m$. Укажем на рисунке силы, действующие на лестницу в «критическом» положении (человек на 9-й

ступени). Запишем условие равновесия сил в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси и найдем $N_{1,2}$:

$$\begin{cases} N_1 + \mu N_2 = 3mg \\ N_2 - 2\mu N_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_1 = \frac{3mg}{1+2\mu^2} \\ N_2 = \frac{6\mu mg}{1+2\mu^2} \end{cases}$$

Теперь запишем условие моментов относительно нижнего конца лестницы (учитывая, что точка приложения веса человека находится на расстоянии $\frac{3L}{4}$ от него, где L – длина лестницы):

$$mg \frac{L}{2} \cos(\alpha) + 2mg \frac{3L}{4} \cos(\alpha) - N_2 L [\sin(\alpha) + \mu \cos(\alpha)] = 0. \quad \text{Из этого}$$

уравнения находим, что $\operatorname{tg}(\alpha) + \mu = \frac{2mg}{N_2} \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{1-\mu^2}{3\mu} = \frac{5}{4}$. Итак,

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{1-\mu^2}{3\mu}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{4}\right).$$

$$\textbf{Ответ: } \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{1-\mu^2}{3\mu}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{4}\right).$$

Критерии оценивания

- | | |
|-------------------------------------|---------|
| 1) Сделан рисунок с указанием сил | 2 балла |
| 2) Записано условие равновесия сил | 3 балла |
| 3) Записано условие моментов | 3 балла |
| 4) Получено окончательное выражение | 2 балла |

Задача 3. Две лампочки мощностью 40 Вт и 100 Вт с номинальным напряжением 110 В соединяют последовательно и включают в сеть с напряжением 220 В. Какую мощность потребляет каждая лампочка?

Решение.

Потребляемые мощности можно найти по формулам:

$$P_1' = I^2 \cdot R_1, \quad P_2' = I^2 \cdot R_2 \quad (1) \quad \textbf{2 балла}$$

Сопротивления нитей лампочек определяется из номинальных параметров:

$$P_1 = U_1^2 / R_1$$

$$P_2 = U_2^2 / R_2 \quad \textbf{2 балла}$$

Откуда:

$$R_1 = U_1^2 / P_1$$

$$R_2 = U_2^2 / P_2 \quad (2) \quad \underline{\text{2 балла}}$$

Силу тока вычислим по закону Ома для последовательного участка цепи:

$$I = U / (R_1 + R_2) \quad (3) \quad \underline{\text{1 балл}}$$

Решив совместно уравнения (1), (2), (3), получим

$$P_1' = (U^2 \cdot U_1^2) / (P_1 \cdot (U_1^2 / P_1 + U_2^2 / P_2))^2 \quad \underline{\text{2 балла}}$$

$$P_2' = (U^2 \cdot U_2^2) / (P_2 \cdot (U_1^2 / P_1 + U_2^2 / P_2))^2$$

Подставим числовые данные:

$P_1' = 81,6 \text{ Вт}$, первая лампочка будет светить с перекалом,

$P_2' = 32,6 \text{ Вт}$, вторая лампочка будет светить слабо. 1 балл

Ответ: 81,6 Вт, 32,6 Вт.

Всего: 10 баллов

Задача 4.

10.69. Внутри куска льда без воздушных пузырей находится вмёрзший камень, плотность которого $\rho_k = 2000 \text{ кг/м}^3$, т.е. вдвое больше, чем у воды ($\rho_e = 1000 \text{ кг/м}^3$). Масса куска льда вместе с камнем $M = 3 \text{ кг}$, а температура 0°C . Этот кусок льда опустили в ведро объемом $V = 10 \text{ л}$ с водой, причем оказалось, что ведро заполнено по самые края, а над поверхностью воды выступает только 5 % от общего объема куска льда с камнем. Через некоторое время, после того как часть льда растаяла, кусок льда полностью погрузился в воду и продолжал плавать, не касаясь в течение длительного времени ни дна, ни стенок ведра. Найти массу камня и температуру воды в ведре до опускания в него куска льда. Удельная теплоемкость воды $C = 4,2 \text{ кДж/(кг}\cdot^\circ\text{C)}$, плотность льда $\rho_l = 900 \text{ кг/м}^3$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 335 \text{ кДж/кг}$. Теплообменом с окружающей средой и тепловым расширением тел пренебречь.

Решение.

10.69. Согласно условию плавания, вес куска льда с камнем должен равняться весу вытесненной воды. Следовательно, объём вытесненной воды (объём подводной части «айсберга») равен $\frac{M}{\rho_в} = 3$ л, объём воды в ведре равен $V - \frac{M}{\rho_в} = 7$ л,

начальная масса воды в ведре $m_в = \rho_в V - M = 7$ кг. Обозначим через $V_к$ и $V_л$ объём камня и начальный объём льда. По условию задачи, из воды вначале выступает только 5% от суммарного объёма льда и камня. Поэтому объём их погружённой части равен объёму вытесненной воды: $0,95(V_к + V_л) = \frac{M}{\rho_в}$, а суммарная

масса равна $M = \rho_к V_к + \rho_л V_л$.

Следовательно, $V_к = \frac{M}{\rho_к - \rho_л} \left(1 - \frac{\rho_л}{0,95 \rho_в} \right)$ и $V_л = \frac{M}{\rho_к - \rho_л} \left(\frac{\rho_к}{0,95 \rho_в} - 1 \right)$

Масса камня и начальная масса льда равны:

$$m_к = \rho_к V_к = \frac{M \rho_к}{\rho_к - \rho_л} \left(1 - \frac{\rho_л}{0,95 \rho_в} \right) = \\ = \frac{3 \cdot 2000}{2000 - 900} \left(1 - \frac{900}{0,95 \cdot 1000} \right) \approx 0,287 (\text{кг})$$

$$m_л = M - m_к \approx 3 - 0,287 = 2,713 (\text{кг}).$$

Обозначим конечную массу льда через $m_л'$. Тогда сила тяжести, действующая на «айсберг» по окончании таяния, когда он плавает внутри воды с температурой 0°C , уравнивается силой Архимеда. Следовательно,

$$m_к + m_л' = \rho_в \left(\frac{m_к}{\rho_к} + \frac{m_л'}{\rho_л} \right).$$

$$\text{Отсюда, } m_л' = \frac{\rho_л(\rho_к - \rho_в)}{\rho_к(\rho_в - \rho_л)} \cdot m_к \approx \frac{900 \cdot (2000 - 1000)}{2000 \cdot (1000 - 900)} \cdot 0,287 = 1,292 (\text{кг})$$

Следовательно, растаяла масса льда $\Delta m = m_л - m_л' \approx 2,713 - 1,292 = 1,421 (\text{кг})$. На плавление льда массой Δm потребовалось количество теплоты $\lambda \Delta m$, которое было отнято от воды в ведре при её охлаждении от начальной температуры t до 0°C : $\lambda \Delta m = C m_в t$, откуда

$$t = \frac{\lambda \Delta m}{C m_в} \approx \frac{335 \cdot 1,421}{4,2 \cdot 7} \approx 16,2 (^\circ \text{C}).$$

Критерии оценивания.

- | | |
|---|---------|
| 1) Определены объём камня и льда | 4 балла |
| 2) Определены массы льда и камня | 2 балла |
| 3) Записано условие равновесия айсберга | 2 балла |
| 4) Записано уравнение теплового баланса | 2 балла |

Задача 5.

10.75. Два проводника сопротивлением 2 Ом и 6 Ом включаются в сеть сначала параллельно, потом последовательно друг к другу. Какое количество теплоты выделится в первом и во втором случаях в проводнике сопротивлением 6 Ом за время, в течение которого в проводнике 2 Ом выделяется 6 кДж?

Решение.

10.75.1. Последовательное соединение сопротивлений:

J - сила тока, Q - количество выделяемого тепла, t - время

$$Q_1 = J^2 R_1 t, \quad Q_2 = J^2 R_2 t;$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2}, \quad Q_2 = Q_1 \frac{R_2}{R_1} = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18 \text{ кДж}$$

2. Параллельное соединение сопротивлений

$$Q_1 = J_1^2 R_1 t, \quad Q_2 = J_2^2 R_2 t;$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{J_1^2}{J_2^2} \frac{R_1}{R_2}$$

При параллельном соединении $\frac{J_1}{J_2} = \frac{R_2}{R_1}$.

Следовательно, $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_2^2}{R_1^2} \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_2}{R_1}$

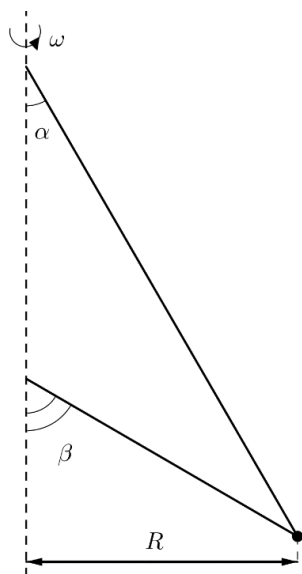
$$Q_2 = Q_1 \frac{R_1}{R_2} = \frac{6 \cdot 2}{6} = 2 \text{ кДж}.$$

Ответ: $Q_{\text{посл}} = 18 \text{ кДж}$, $Q_{\text{парал}} = 2 \text{ кДж}$.

Критерии оценивания.

- 1) Записан закон Джоуля-Ленца для последовательного соединения 2 балла
- 2) Записан закон Джоуля-Ленца для параллельного соединения 2 балла
- 3) Найдено Q_1 2 балла
- 4) Записано условие обратной зависимости токов и сопротивлений при параллельном соединении 2 балла
- 5) Найдено Q_2 2 балла

11 класс



Задача 1. Небольшой шарик массой m движется в горизонтальной плоскости по окружности радиуса $R = 25,0$ см вокруг вертикальной оси. Шарик удерживают две нити (рис. 1), составляющие с осью вращения углы $\alpha = 30^\circ$ и $\beta = 60^\circ$. Найдите значения угловой скорости ω при которых силы натяжения нитей отличаются в 2 раза. Ускорение свободного падения $g = 9,81$ м/с².

Решение. А) Пусть верхняя нить натянута сильнее.

Тогда:

- 1) $m\omega^2 R = 2T \sin \alpha + T \sin \beta$;
- 2) $mg - 2T \cos \alpha - T \cos \beta = 0$.

Решая эту систему уравнений получим:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{R} \frac{2 \sin \alpha + \sin \beta}{2 \cos \alpha + \cos \beta}} \approx 0,914 \sqrt{\frac{g}{R}} \approx 5,7 \text{ с}^{-1}.$$

Б) Пусть теперь нижняя нить натянута сильнее. Тогда:

- 1) $m\omega^2 R = T \sin \alpha + 2T \sin \beta$;
- 2) $mg - T \cos \alpha - 2T \cos \beta = 0$.

Решая эту систему уравнений получим:

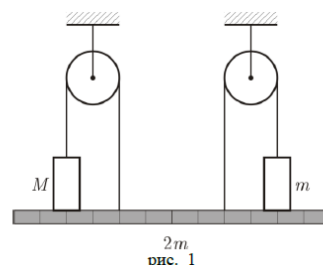
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{R} \frac{\sin \alpha + 2 \sin \beta}{\cos \alpha + 2 \cos \beta}} \approx 1,09 \sqrt{\frac{g}{R}} \approx 6,8 \text{ с}^{-1}.$$

Критерии оценивания

1) Записана система уравнений для случая (А) (по 1,5 балла)	3 балла
2) Решена система уравнений	1 балл
3) Получен численный ответ	1 балл
4) Записана система уравнений для случая (Б) (по 1,5 балла)	3 балла
5) Решена система уравнений	1 балл
6) Получен численный ответ	1 балл

Задача 2.

В системе (рис. 1) найдите величины сил, с которыми грузы действуют на однородную планку. При каких значениях массы M возможно равновесие грузов на планке? Нити и блоки невесомы. Трения нет. Масса m известна.



Решение.

Равновесие возможно, если существуют отличные от нуля силы реакции грузов и планки и силы натяжения нитей. Для нахождения сил натяжения рассмотрим только внешние силы, действующие на систему грузы+блоки+планка. Правила моментов относительно точек O_1 и O_2 , лежащих на линиях действия сил натяжения верхних нитей (рис. 12), имеют вид:

$$Mgx + 2T_2 6x = 2mg 3x + mg 7x \quad (\text{относительно точки } O_1),$$

$$mgx + 2T_1 6x = 2mg 3x + Mg 7x \quad (\text{относительно точки } O_2).$$

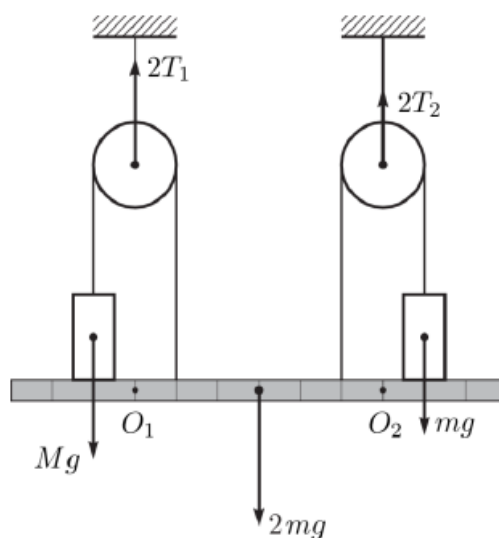


рис. 12

$$\text{Откуда } T_1 = \frac{5m + 7M}{12}g, T_2 = \frac{13m - M}{12}g.$$

Видно, что левая нить не провисает при любых массах M , а правая натянута при $M < 13m$. Запишем условия равновесия для каждого из грузов в отдельности:

$$Mg = T_1 + N_1,$$

$$mg = T_2 + N_2.$$

Откуда с учетом выражений для сил натяжения силы реакции равны: $N_1 = 5(M - m)g / 12$ и $N_2 = (M - m)g / 12$. Положительные значения сил реакции будут только при $M > m$.

Окончательно, равновесие системы возможно для $m \leq M < 13m$.

Примерные критерии оценивания

Проанализированы условия равновесия	1 балл
Записаны уравнения моментов для системы (для планки)	2 балла
Получено условие для натянутых нитей	2 балла
Уравнения равновесия грузов	2 балла
Условия сохранения контакта грузов и планки	2 балла
Явно записан диапазон значений для M	1 балл

Задача 3. Теплоизолированный цилиндрический сосуд разделён на две части не проводящим тепло поршнем, который может перемещаться без трения. В начальный момент в левой и правой частях сосуда находится по одному молю гелия при одинаковой температуре. В левую часть сосуда подвели тепло с помощью нагревателя. При этом температура гелия в ней увеличилась на **малую величину** ΔT . Определите изменение температуры ΔT_2 в правой части сосуда и количество теплоты Q , переданное нагревателем.

Решение.

Запишем уравнения Менделеева-Клапейрона для 1 моль газа, находящегося в начальном и в конечном состоянии:

$$\begin{cases} P_0 V = RT_0 \\ P_1 (V + \Delta V) = R(T_0 + \Delta T) \\ P_1 (V - \Delta V) = R(T_0 + \Delta T_2) \end{cases}$$

Здесь учтено, что давление в левой и правой частях всегда (при равновесном процессе) одинаково, а суммарный объём частей не изменяется.

Составим пропорцию из уравнений для конечного состояния:

$$\begin{aligned} \frac{(V + \Delta V)}{(V - \Delta V)} &= \frac{(T_0 + \Delta T)}{(T_0 + \Delta T_2)} \\ (V + \Delta V)(T_0 + \Delta T_2) &= (V - \Delta V)(T_0 + \Delta T) \\ VT_0 + V\Delta T_2 + T_0\Delta V &= VT_0 + V\Delta T - T_0\Delta V \\ 2\frac{\Delta V}{V} &= \frac{\Delta T}{T_0} - \frac{\Delta T_2}{T_0} \end{aligned} \quad (1)$$

При раскрытии скобок мы пренебрегаем малыми величинами второго порядка $\Delta V\Delta T$ и $\Delta V\Delta T_2$.

Запишем первое начало термодинамики для процессов в цилиндре:

$$\begin{cases} Q = A + \Delta U_{ЛЕВ} = A + \frac{3}{2} R\Delta T \\ 0 = -A + \Delta U_{ПРАВ} = -A + \frac{3}{2} R\Delta T_2 \end{cases} \quad (2)$$

Здесь учтено, что процесс в правой части сосуда адиабатный, а суммарная работа в системе равна нулю.

Для малых изменений объёма и давления работу можно представить в виде:

$A = P_0\Delta V$, что даёт нам вместе с условием на адиабатный процесс (2):

$$0 = -P_0\Delta V + \frac{3}{2} R\Delta T_2 \Rightarrow \Delta V = \frac{3}{2} \frac{R\Delta T_2}{P_0} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{2} \frac{R\Delta T_2}{P_0 V} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{2} \frac{R\Delta T_2}{RT_0} = \frac{3}{2} \frac{\Delta T_2}{T_0}$$

Подставляем эту связь в уравнение (1)

$$3 \frac{\Delta T_2}{T_0} = \frac{\Delta T}{T_0} - \frac{\Delta T_2}{T_0} \Rightarrow \Delta T_2 = \frac{\Delta T}{4}.$$

$$A = \frac{3}{2} R \frac{\Delta T}{4}$$

Тогда

$$Q = \frac{3}{2} R \Delta T + \frac{3}{2} R \frac{\Delta T}{4} = \frac{15}{8} R \Delta T$$

Критерии оценивания

1	Записаны уравнения для начального и конечного состояний газа в правой и левой части сосуда	1 балл
2	В уравнениях состояния учтено равенство давлений и связь изменений объёмов	1 балл
3	Получено выражение (1) а) Если выражение (1) получено, а уравнения состояния не писались (сразу была написана пропорция) за пп.1-3 ставится 4 балла. б) Выражение (1) может быть записано в виде $2T_0\Delta V = V(\Delta T - \Delta T_2)$ с) Если в процессе получения выражения (1) малыми величинами второго порядка не пренебрегли, ставится полный балл	2 балла
4	Записаны выражения для I начала термодинамики в данных процессах а) Важно, чтобы в данных выражениях присутствовал факт адиабатного процесса в правой части и равенство работ газов (с противоположным знаком). Баллы ставятся именно за эти факты! б) Вместо двух выражений может быть записан один закон для системы в целом: $Q = \frac{3}{2} R \Delta T + \frac{3}{2} R \Delta T_2$	2 балла
5	Записано выражение для работы при малом изменении объема и давления	1 балл
6	Получена связь ΔV и ΔT_2 : $\frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{2} \frac{\Delta T_2}{T_0}$	1 балла
7	Определено изменение температуры ΔT_2	1 балл
8	Получено окончательное выражение для Q	1 балл

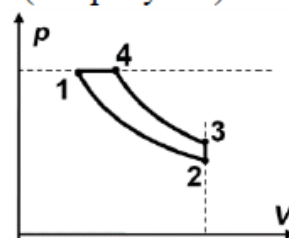
Задача 4.

Для охлаждения процессора используется холодильная установка, рабочее тело которой – постоянное количество гелия. Цикл гелия состоит из двух адиабат, изобары и изохоры. Известно, что в ходе изобарического сжатия температура гелия уменьшается на $\Delta t_1 = 20^\circ\text{C}$, а в ходе изохорического нагревания – увеличивается на $\Delta t_2 = 30^\circ\text{C}$. Какую мощность должен потреблять двигатель холодильника, если его

КПД равен 75%, а для поддержания постоянной температуры от процессора нужно отводить тепло с мощностью $P_X = 270\text{Вт}$?

Решение задачи: Изобразим диаграмму процесса (см. рисунок).

Поскольку в адиабатических процессах теплообмена нет, то теплота, забранная за цикл рабочим телом у содержимого холодильника Q_X , как и теплота, отданная рабочим телом в окружающую среду Q_H , выражаются через теплоемкости гелия в изобарном



и изохорном процессах: $Q_X = c_V \nu (T_3 - T_2) = \frac{3}{2} \nu R \Delta t_2$

и $Q_H = c_P \nu (T_4 - T_1) = \frac{5}{2} \nu R \Delta t_1$, где R – универсальная газовая постоянная. Из условия энергетического баланса

$Q_H = Q_X + A \Rightarrow A = \frac{\nu R}{2} (5\Delta t_1 - 3\Delta t_2)$. Значит, холодильный

коэффициент этой установки $k \equiv \frac{Q_X}{A} = \frac{3\Delta t_2}{5\Delta t_1 - 3\Delta t_2} = 9$. С другой

стороны, за один цикл, проходящий за время τ , $Q_X = P_X \cdot \tau$, а произведенная над гелием работа $A = 0,75 \cdot P \tau$, где P – искомая мощность двигателя.

Значит, $0,75 \cdot P = P_X / k$, то есть $P = \frac{4(5\Delta t_1 - 3\Delta t_2)}{9\Delta t_2} P_X = 40\text{Вт}$.

Ответ: $P = \frac{4(5\Delta t_1 - 3\Delta t_2)}{9\Delta t_2} P_X = 40\text{Вт}$.

Критерии оценивания:

- | | |
|---|---------|
| 1) Изображена диаграмма процессов | 2 балла |
| 2) Записаны выражения для количества теплоты нагревателя | 1 балл |
| 3) Записаны выражения для количества теплоты холодильника | 1 балл |
| 4) Записана формула холодильного коэффициента установки | 2 балла |
| 5) Записана формула энергетического баланса | 2 балла |

Задача 5.

На двух длинных параллельных рельсах, расположенных на горизонтальной поверхности на расстоянии $l = 1$ м друг от друга, лежит перпендикулярно рельсам проводящий стержень массой $m = 0,5$ кг. Коэффициент трения между стержнем и рельсами $\mu = 0,1$. Вся система находится в однородном магнитном поле, вектор индукции которого направлен вертикально и по модулю равен $B = 0,1$ Тл. Рельсы подключают к источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 10,1$ В, в результате чего стержень приходит в движение. Пренебрегая сопротивлением рельсов и

внутренним сопротивлением источника, а также считая сопротивление отрезка стержня между точками его контакта с рельсами равным $R = 2$ Ом, найдите, с какой установившейся скоростью v_0 будет двигаться стержень. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с².

Решение. Стержень придет в движение под действием силы Ампера $F_A = IBl$, где I – сила тока в цепи. Используя закон электромагнитной индукции и правило Ленца, находим, что при движении стержня со скоростью v на его концах возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_{\text{инд}} = Bvl$, направленная против ЭДС источника. По закону Ома для замкнутой цепи имеем: $I = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_{\text{инд}}}{R}$. По второму закону Ньютона уравнение движения стержня имеет вид $ma = F_A - F_{\text{тр}}$, где a – ускорение стержня, а $F_{\text{тр}} = \mu mg$ – модуль силы трения скольжения. При установившемся движении стержня $a = 0$, а $v = v_0$. Из записанных выражений следует равенство $\frac{(\mathcal{E} - Bv_0l)Bl}{R} = \mu mg$, откуда $v_0 = \frac{1}{Bl} \left(\mathcal{E} - \frac{\mu mgR}{Bl} \right)$.

Ответ: $v_0 = \frac{1}{Bl} \left(\mathcal{E} - \frac{\mu mgR}{Bl} \right) = 1$ м/с. При $\mathcal{E} \leq \frac{\mu mgR}{Bl} = 10$ В стержень не сдвинется с места и его скорость будет равна нулю.

Критерии оценивания:

- | | |
|--|---------|
| 1) Записано выражение для ЭДС | 2 балла |
| 2) Записано выражение для силы Ампера | 2 балла |
| 3) Записано выражение 2 закона Ньютона | 2 балла |
| 4) Записано выражение закона Ома | 1 балл |
| 5) Получен окончательный ответ | 3 балла |